IUFM Antilles-Guyane

Capes Mathématiques

Algèbre-Géométrie

CAPES externe 1971composition 2 : énoncé & solution

(modifiée pour proposer plus d'indications dans l'énoncé)

Problème :

Première Partie :(*)

L'étude se place dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. Γ désigne un cône de révolution de sommet O, d'axe γ et de demi-angle au sommet θ $\quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$.

On note Δ l'ensemble des déplacements de $\mathcal{E}$ laissant Γ globalement invariant.

1°/ Montrer que $(\Delta, \circ)$ est un groupe.

2°/ a) Soit $f \in \Delta$. Montrer que $f(O) = O$ et que l'axe γ du cône Γ est globalement invariant par f. En déduire que les éléments de Δ sont constitués des rotations d'axe γ et de retournements (ie symétries axiales, ou demi-tours) s_δ par rapport à des droites δ que l'on précisera.

b) Quel est l'ensemble Δ' des retournements s_D d'axe D laissant Γ globalement invariant ?

c) Montrer que tout retournement de Δ' commute avec 2 autres retournements de Δ' convenablement choisis.

d) Montrer que tout élément de Δ s'écrit comme composé de 2 éléments de Δ'.

(*) Les 2 parties sont indépendantes)

3°/ Remplaçons, dans cette question seulement, le cône Γ par un cylindre de révolution Σ d'axe γ.

a) Le résultat du I.1°/ reste-t-il inchangé ?

b) Décrire les éléments de Δ.

c) Tout retournement de Δ' commute-t'il encore avec 2 autres retournements de Δ' ?

d) Tout élément de Δ s'écrit-il encore comme le produit de 2 retournements de Δ' ?

4°/ On désigne par G l'ensemble des génératrices du cône Γ et par d_0 un élément fixé de G. On définit la loi de composition $*$ dans G de la manière suivante :

Étant donné 2 éléments d_1 et d_2 de G, le plan (d_1, d_2) coupe le plan perpendiculaire en O à l'axe γ de Γ suivant une droite δ. Le plan (d_0, δ) recoupe en général Γ suivant une droite d.

On pose alors :

$$d = d_1 * d_2$$

Si $d_1 = d_2$, le plan (d_1, d_2) est le plan tangent à Γ le long de d_1.
Si le plan (d_0, δ) est tangent à Γ, on prend $d = d_0$.

Démontrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.

(On pourra considérer l'intersection C de Γ et d'un plan perpendiculaire à γ ne passant pas par O, noter A_i l'intersection de d_i et C et interpréter géométriquement la loi $*$ sur le cercle C au moyen des points A_i.)

5°/ Soit Π un plan ne passant pas par O. On note G' le sous-ensemble de G constitué par des droites non parallèles à Π et E l'ensemble des points communs au cône Γ et au plan Π :

$$E = \Pi \cap \Gamma$$

On désigne par φ l'application de G' vers E telle que $\varphi(d) = d \cap \Pi$ pour toute droite d de G'.

a) Montrer que φ est une bijection

Soit $\mathcal{T}$ la loi induite par $*$ et φ sur l'ensemble E, ie la loi qui à $a_1 = \varphi(d_1)$ et $a_2 = \varphi(d_2)$ associe, quand c'est possible :

$$a = a_1 \mathcal{T} a_2 = \varphi(d_1 * d_2)$$

Notons $a_0 = \varphi(d_0)$ et P le plan perpendiculaire à γ passant par O.

b) On suppose Π non parallèle à P. Soit $D = P \cap \Pi$.

Montrer que les droites a_1a_2 et a_0a lorsqu'elles sont sécantes, se coupent en un point situé sur D.

Soit E' la projection orthogonale de la conique E sur le plan P. Démontrer que D est la directrice associée au foyer O de la conique E' (On pourra représenter, sur un dessin perspectif, les plans P et Π, l'ensemble E, un point M de E, sa projection m sur P et la projection H de m sur D)

c) Que dire des droites a_1a_2 et a_0a quand Π est parallèle à P ?

d) Montrer que $(E, \mathcal{T})$ est un groupe abélien dès que le plan Π ne contient aucune parallèle à une génératrice de Γ.

e) Vérifier que la loi $\mathcal{T}$ n'est pas définie sur tout E quand le plan Π contient au moins une parallèle à une génératrice de Γ.

Deuxième Partie :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère d'origine O et de base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Au point m de coordonnées (a, b, c) on associe le polynôme en x :

$$f_m(x) = a x^2 + \sqrt{2}.b x + c$$

Les racines de $f_m(x)$ qui interviennent dans la suite appartiennent au corps des complexes.

1°/ Quel est l'ensemble décrit par les points m dans chacun des cas suivants :

a) $a f_m(x)$ et $f_m'(x)$ ont le même ensemble de racines. On désignera par S l'ensemble des points m ainsi défini.
Démontrer que S est un cône de révolution dont on précisera le sommet, l'axe et le demi-angle au sommet (il sera commode de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{Om} . \vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{k}$).

b) $a f_m(x)$ n'a aucune racine réelle.

c) $f_m(x)$ a 2 racines réelles distinctes

2°/ a) Déterminer l'ensemble des points m tels que $f_m(\lambda) = 0$ où λ est un nombre donné. On distinguera 2 cas suivant que λ soit un nombre réel ou un complexe non réel.
Lorsque λ est réel, situer géométriquement cet ensemble par rapport à S.

b) Notons $f_m^{-1}(0)$ l'ensemble des racines de $f_m(x)$.

- Déterminer l'ensemble des points m tels que $f_m^{-1}(0) = \{\alpha\}$ où α est un réel donné.

- Déterminer l'ensemble des points m tels que $f_m^{-1}(0) = \{\alpha, \beta\}$ où α et β sont 2 nombres réels ou complexes distincts donnés.

3°/ Soit P l'ensemble des points d'intersection de S avec le plan d'équation $a = 1$.

Démontrer que l'application de P vers $\mathbb{R}$ qui à tout point $m(1, b, c)$ de P associe la racine α de $f_m(x)$ est une bijection. On désigne par h l'application réciproque de cette bijection.

Donner une définition purement géométrique de la loi de groupe $\circ$ sur P induite par h de l'addition des réels, ie :

$$m_1 \circ m_2 = h(\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{dès que } m_1 = h(\alpha_1) \text{ et } m_2 = h(\alpha_2)$$

Il s'agit du CAPES 71, 2e composition. L'énoncé a été détaillé, et la dernière question de la partie II de l'original supprimée

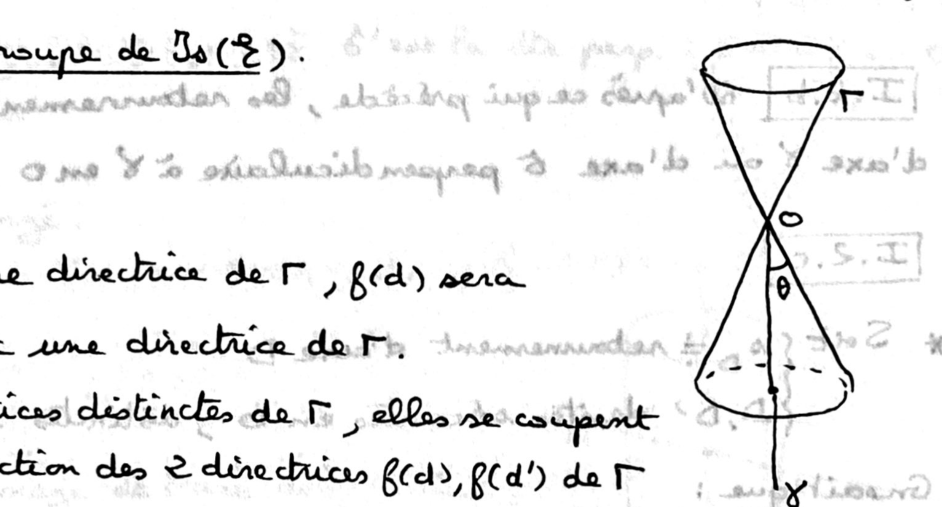
Solution :

I.1 * $Id \in \Delta$

* Si $f, g \in \Delta$, $f\circ g$ est un déplacement tel que $f\circ g(\Gamma) = f(\Gamma) = \Gamma$ soit $f \circ g \in \Delta$

* Si $f \in \Delta$, f est bijective, f^{-1} est un déplacement et $f^{-1}(\Gamma) = \Gamma \Rightarrow f^{-1} \in \Delta$.

Ccl : $(\Delta, \circ)$ est un sous-groupe de $Is(\mathcal{E})$.



I.2.a

* Soit $f \in \Delta$. Si d est une directrice de Γ, $f(d)$ sera une droite du cône Γ donc une directrice de Γ.

Si d et d' sont 2 directrices distinctes de Γ, elles se coupent en O et $f(O)$ sera l'intersection des 2 directrices $f(d), f(d')$ de Γ ie $\boxed{f(O) = O}$

* Soient P et P' 2 plans distincts contenant l'axe γ. Ce sont des plans de symétrie de Γ, donc $f(P)$ et $f(P')$ aussi : $f(P)$ et $f(P')$ contiendront γ ou seront perpendiculaires à γ passant par O.

Le second cas est impossible car P (et P') coupe Γ suivant 2 directrices d et d', donc $f(P)$ doit contenir les 2 directrices $f(d)$ et $f(d')$.

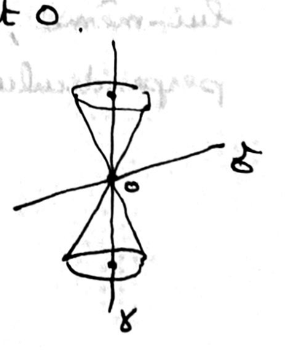
En conclusion :
$$f(\gamma) = f(P\cap P') = f(P) \cap f(P') = \gamma$$

$$\boxed{f(\gamma) = \gamma}$$

* Nature des éléments de Δ :

Soit $f \in \Delta$. $f(O) = O$ donc f est une rotation d'axe contenant O.
γ est globalement invariante par f, donc :

→ f est une rotation d'axe γ
ou
→ f est un retournement d'axe δ perpendiculaire à γ



Rappel : Une rotation ne peut avoir de dte globalement invariante autre que son axe que si c'est un retournement. En effet : la matrice d'une rotation r est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans une b.o. adéquate. Ses valeurs propres sont 1 et $e^{\pm i\theta}$. Une dte sera globalement invariante et distincte de $\mathrm{Ker}(r - Id)$ ssi c'est un sev propre associé à une valeur propre réelle, distincte de $\mathrm{Ker}(r - Id)$, ie $e^{\pm i\theta} \in \mathbb{R} \iff \theta = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \iff \mathrm{Mat}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

I.2.b D'après ce qui précède, les retournements de Δ sont ceux d'axe γ ou d'axe δ perpendiculaire à γ en O.

I.2.c

* Soit $\begin{cases} s_D \doteq \text{retournement d'axe } D \\ D, D' \text{ droites sécantes en O, distinctes.} \end{cases}$

On sait que :

$$s_D \circ s_{D'} \text{ est la rotation d'axe } (O, (\vec{D} + \vec{D'})^{\perp}) \text{ et d'angle } 2\,\widehat{\vec{D}, \vec{D'}}.$$

Ainsi : $s_D \circ s_{D'} = s_{D'} \circ s_D \iff 2\,\widehat{D, D'} = 2\,\widehat{D', D} \quad [2\pi]$

$\iff 4\,\widehat{D, D'} = k2\pi$

$\iff \widehat{D, D'} = k\frac{\pi}{2}$

$\iff D \perp D'$

s_D et $s_{D'}$ commutent ssi $D \perp D'$

On en déduit que :

- le retournement d'axe γ commute avec tous les retournements d'axe δ perpendiculaires à γ en O.

- si δ est perpendiculaire à γ en O, s_δ d'axe δ commutera avec lui-même, le retournement s_γ et le retournement $s_{\delta'}$ où δ' est perpendiculaire à γ et à δ, et passe par O.

I.2.d Si $f \in \Delta$, 2 cas sont à envisager :

* f est la rotation d'axe γ, d'angle α. On a $f = s_\delta \circ s_{\delta'}$, où s_δ (resp. $s_{\delta'}$) est le retournement d'axe δ (resp. δ') orthogonal à γ en O et tels que $\widehat{\delta, \delta'} = \frac{\theta}{2}$ $[\pi]$.

* Si f est un retournement s_δ d'axe $\delta \perp \gamma$, on a :

$$f = s_\delta = \underbrace{s_\gamma}_{\in\Delta'} \circ \underbrace{s_{\delta'}}_{\in\Delta'} = s_{\delta'} \circ s_\gamma$$ où δ' est la dte perp. à δ et à γ en O.

I.3.a Rien est changé.

I.3.b

* Si $f \in \Delta$, $f(\gamma) = \gamma$: En effet, $f(\gamma)$ sera axe de symétrie de Σ comme image de l'axe de symétrie γ.
$f(\gamma)$ sera donc soit γ, soit une dte δ perpendiculaire à γ et passant par un pt de γ.
Si P et P' sont 2 plans contenant γ, ils sont plans de symétrie de Σ et coupent Σ suivant 2 directrices. Les images $f(P)$ et $f(P')$ seront aussi plans de symétrie de Σ (donc contenant γ ou perpendiculaires à γ) et contenant des directrices de Σ : cela entraine $\gamma \subset f(P) \cap f(P')$ d'où $f(\gamma) = \gamma = f(P) \cap f(P')$ (dès que P, P' distincts).

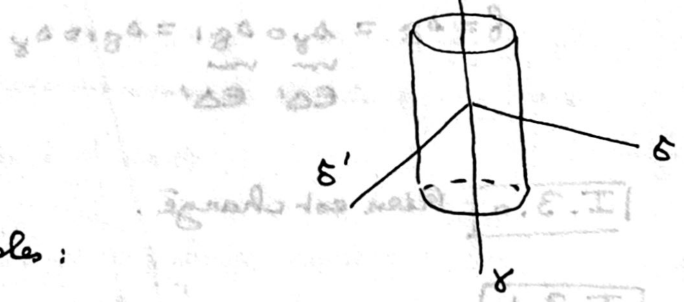
* Soit $f \in \Delta$. De 3 choses l'une :
  1) Si f est une translation : $f = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \in \vec{\gamma}$
  2) Si f est une rotation : $f(\gamma) = \gamma \Rightarrow$ { f rotation d'axe γ ou f retournement d'axe δ perp. à γ
  3) Si f est un vissage : $f(\gamma) = \gamma \Rightarrow \gamma$ est l'axe de f
  et $f = t_{\vec{u}} \circ r$ où { $\vec{u} \in \vec{\gamma}$, r = rotation d'axe γ.

I.3.c Les retournements f de Δ sont de 2 sortes d'après I.3.b :

• f = retournement d'axe γ : il commute avec tous les retournements d'axe δ perpendiculaire à γ.

ou • $f = s_\delta$ = retournement d'axe δ perpendiculaire à γ. Il commute avec lui-même, avec s_γ et avec le retournement $s_{\delta'}$ d'axe δ' perpendiculaire à δ et à γ.

Le résultat du I.2 subsiste.



I.3.d Soit $f \in \Delta$. Il y a 3 cas possibles :

1) Si f est une translation : $f = t_{\vec{u}} = s_\delta \circ s_{\delta'}$ où δ, δ' perpendiculaires à γ et $\delta = \delta' + \frac{\vec{u}}{2}$

2) Si f est une rotation :

- d'axe γ : elle s'écrira comme produit $s_\delta \circ s_{\delta'}$ où δ', δ sont perpendiculaires à γ, coupent γ en 1 même point, et $\widehat{\delta', \delta} = \frac{\text{mes } f}{2}$ $[\pi]$
- d'axe δ perpendiculaire à γ : elle s'écrit $f = s_{\delta'} \circ s_\delta$ où δ' perpendiculaire à γ et δ.

3) Si f est un vissage : $f = t_{\vec{u}} \circ r$ avec le dessin

on décompose $t_{\vec{u}} = s_{\delta''} \circ s_\delta$

$r = s_\delta \circ s_{\delta'}$

pour obtenir $f = s_{\delta''} \circ s_\delta \circ s_\delta \circ s_{\delta'}$

$$\boxed{f = s_{\delta''} \circ s_{\delta'}}$$

δ'' — δ — δ' — $\frac{\theta}{2}$ — $\frac{\vec{u}}{2}$

L'affirmation proposée est encore vraie.

I.4

C = cercle intersection de Γ et d'un plan perpendiculaire à δ ne passant pas par O.

$A_i = C \cap d_i$

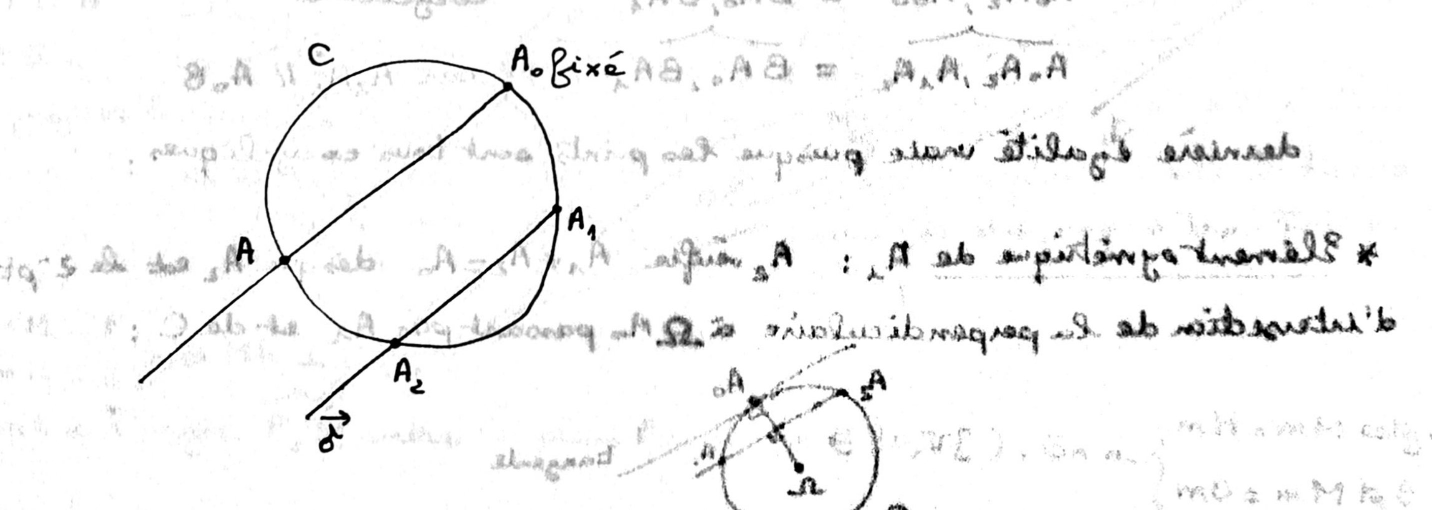
$A = C \cap d$

Chaque génératrice d de Γ est repérée par un et un seul point $A = C \cap d$ de C

La dte A_1A_2 est de direction incluse dans $\vec{P}$ et dans la direction du plan (d_1, d_2), donc A_1A_2 est parallèle à δ.

La trace A de $d = d_1 * d_2$ sur C s'obtiendra donc en traçant la parallèle à A_1A_2 passant par A_0 et en notant A l'intersection de cette parallèle et de C. (cf figure ci-dessus).

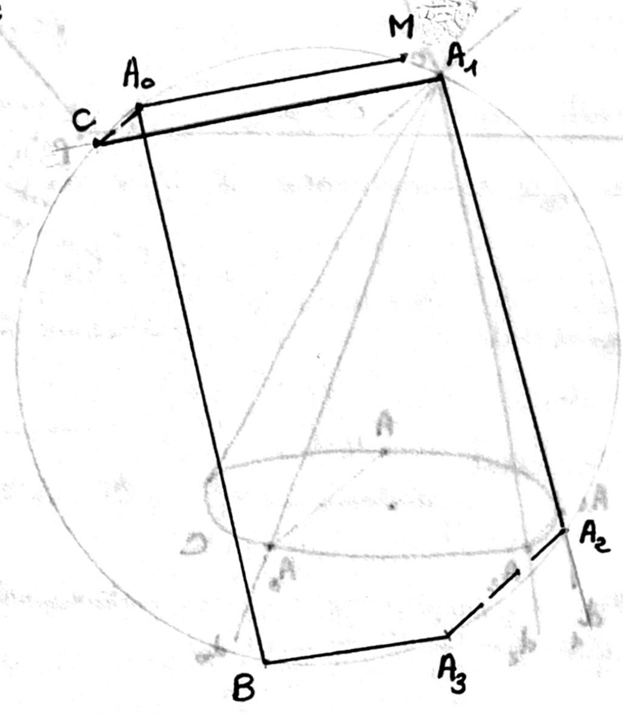
D'où la construction de $A_1 * A_2$ dans C :



(G, *) est un groupe : la commutativité est triviale. On a :

* $\forall d_1 \in G \quad d_1 * d_0 = d_1$ donc d_0 est l'élément neutre de G.

* Associativité :



On veut prouver que $\underbrace{(A_1 * A_2)}_{B} * A_3 = A_1 * \underbrace{(A_2 * A_3)}_{C}$ (avec M = $(A_1 * A_2) * A_3$ et N = $A_1 * (A_2 * A_3)$)

On a : $\begin{cases} A_1A_2 \parallel A_0B \\ A_3B \parallel A_0M \end{cases}$ $\begin{cases} A_2A_3 \parallel A_0C \\ CA_1 \parallel A_0N \end{cases}$

et tout revient à montrer que $A_0M \parallel A_0N$ ie, par transitivité de la relation $\parallel$: $\boxed{A_3B \parallel CA_1}$ ie successivement :

$\widehat{A_2A_3, A_3B} = \widehat{A_2A_3, CA_1}$ (angles de dtes)

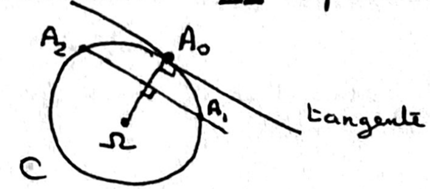
$\widehat{A_3A_2, A_3B} = \widehat{CA_0, CA_1}$ car $A_2A_3 \parallel A_0C$

$\widehat{A_0A_2, A_0B} = \widehat{BA_0, BA_1}$ cocyclicité

$\widehat{A_0A_2, A_1A_2} = \widehat{BA_0, BA_1}$ car $A_1A_2 \parallel A_0B$

dernière égalité vraie puisque les points sont tous cocycliques.

* Élément symétrique de A_1 : A_2 vérifie $A_1 * A_2 = A_0$ dès que A_2 est le 2e pt d'intersection de la perpendiculaire à ΩA_0 passant par A_1 et de C :



I.5.a

$\varphi : G' \longrightarrow E$

$\quad d \longmapsto \varphi(d) = d \cap \Pi$

φ est surjective car si $M \in E$, OM est une directrice de Γ et $\varphi(OM) = M$.

Si $\varphi(d) = \varphi(d')$, les 2 directrices d et d' passent par O et $\varphi(d) = \varphi(d')$ donc sont confondues. φ est donc injective.

<u>Ccl</u> : φ est bijective

I.5.b * On a $\quad a_1a_2 \subset$ plan $Oa_1a_2 =$ plan $OA_1A_2 \quad$ (A_i définis au I.4)

$\quad aa_0 \subset$ plan $Oaa_0 =$ plan OAA_0

Les plans OA_1A_2 et OAA_0 se coupent suivant une droite δ de P parallèle à A_1A_2 (car $A_1A_2 \parallel AA_0$) et passant par O.

Donc $\quad a_1a_2 \cap aa_0 \subset OA_1A_2 \cap OAA_0 = \delta \subset P$

D'autre part a_1a_2 et aa_0 sont incluses dans Π, donc $\underline{a_1a_2 \cap aa_0 \subset \Pi \cap P = D}$

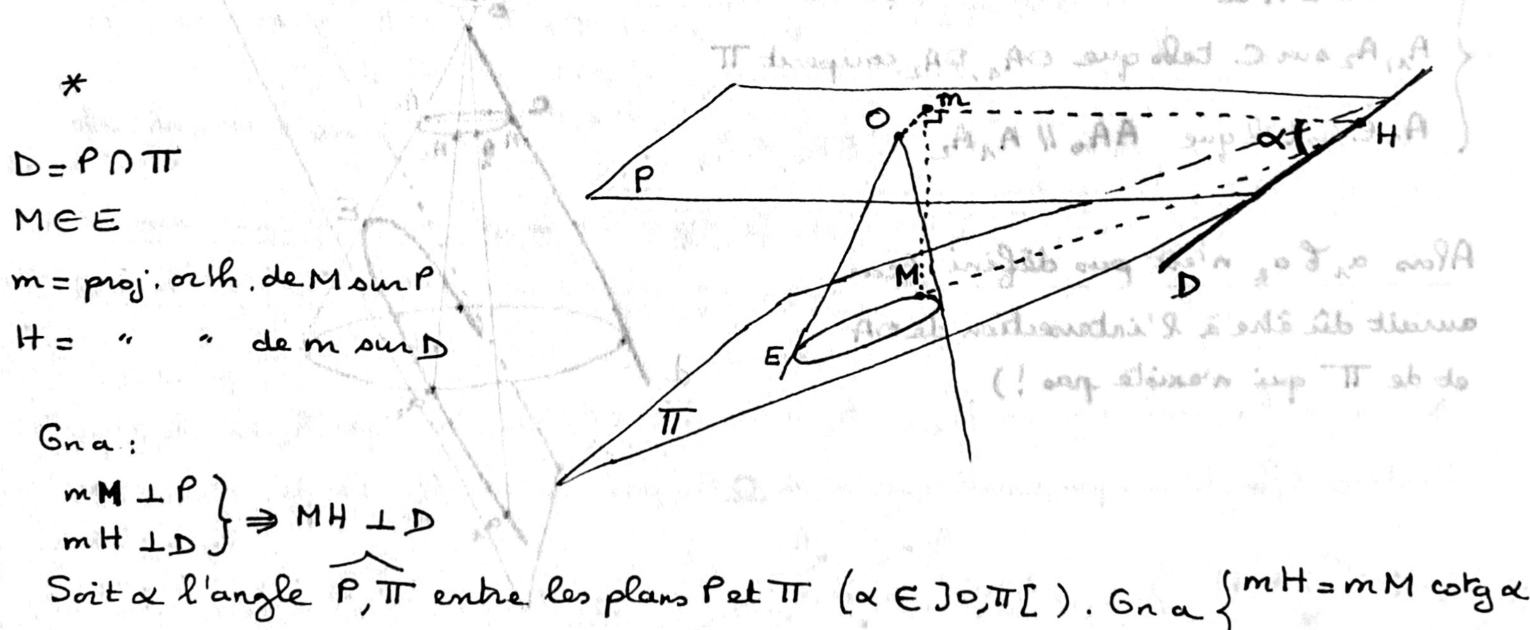
*

$D = P \cap \Pi$

$M \in E$

$m =$ proj. orth. de M sur P

$H =$ " " de m sur D



On a :

$\left.\begin{array}{l} mM \perp P \\ mH \perp D \end{array}\right\} \Rightarrow MH \perp D$

Soit α l'angle $\widehat{P,\Pi}$ entre les plans P et Π ($\alpha \in]0,\pi[$). On a $\left\{\begin{array}{l} mH = mM \operatorname{cotg} \alpha \\ mO = mM \operatorname{tg} \theta \end{array}\right.$

d'où $\frac{mO}{mH} = \frac{tg\,\theta}{cotg\,\alpha}$ $\Rightarrow$ m est sur une conique de foyer O et de directrice D.

Cette conique est bien la projection orthogonale de E sur P.

I.5.c Elles sont parallèles (cf I.4)

I.5.d Π ne contient aucune parallèle à une génératrice de Γ ssi $E = \Pi \cap F$ est une ellipse. La figure I.5.a évoque la bijection :

$$\Psi : E \longrightarrow C$$
$$a_i \longmapsto A_i \qquad \text{où } A_i = (Oa_i) \cap C$$

On a $\Psi(a_1 \mathcal{T} a_2) = \Psi(a_1) * \Psi(a_2)$. Ψ est donc un morphisme pour les lois $\mathcal{T}$ et $*$. $(C, *)$ étant un groupe abélien (cf I.4), $(E, \mathcal{T})$ sera aussi structuré en groupe abélien.

I.5.e 2 cas sont possibles :

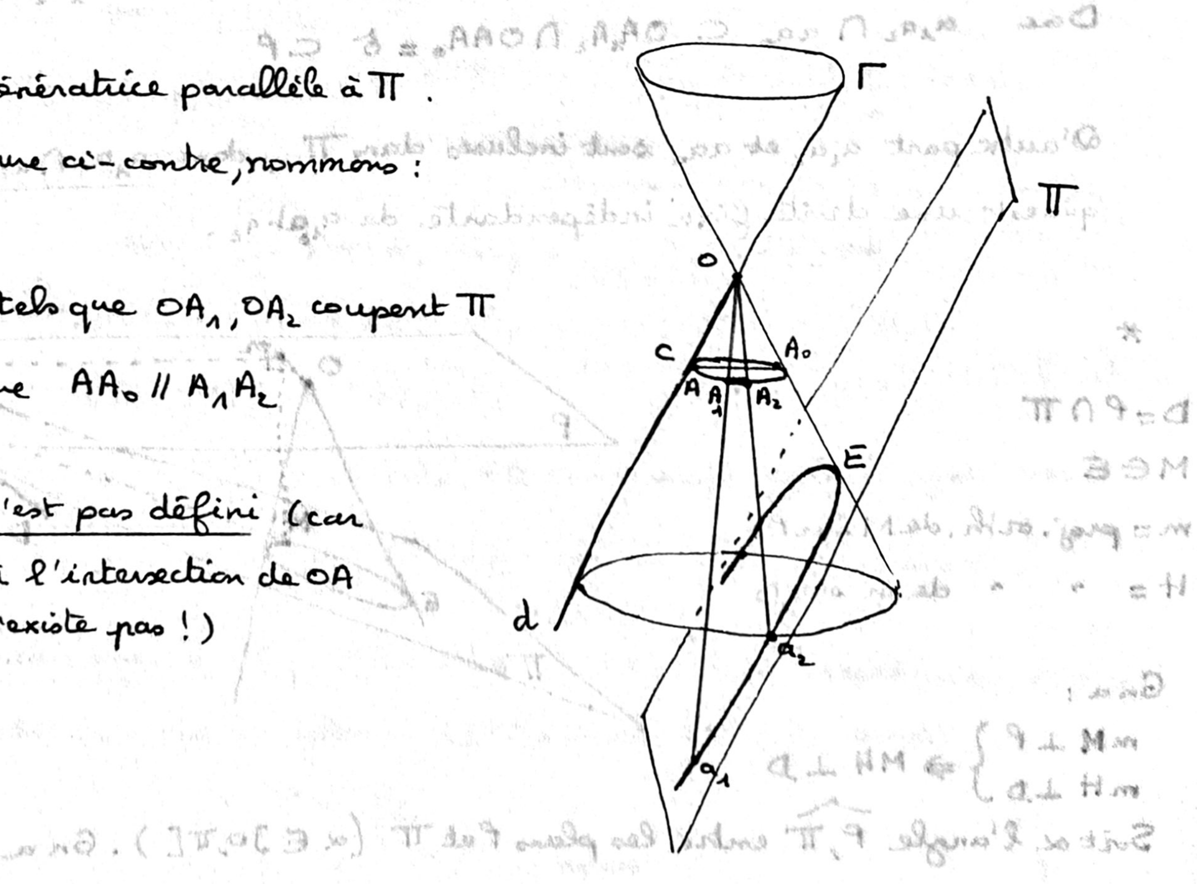
E hyperbole $\Leftrightarrow$ 2 génératrices distinctes de Γ sont parallèles à Π

E parabole $\Leftrightarrow$ Π parallèle à un plan tangent à Γ

* Soit d une génératrice parallèle à Π.

Dans la figure ci-contre, nommons :

$$\begin{cases} A = C \cap d \\ A_1, A_2 \text{ sur } C \text{ tels que } OA_1, OA_2 \text{ coupent } \Pi \\ A_0 \in C \text{ tel que } AA_0 \parallel A_1A_2 \end{cases}$$



Alors $a_1 \mathcal{T} a_2$ n'est pas défini (car aurait dû être à l'intersection de OA et de Π qui n'existe pas !)

II.1.a

$m\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \longmapsto f_m(x) = ax^2 + \sqrt{2}\,bx + c$

$f'_m(x) = 2ax + \sqrt{2}\,b$

* <u>Si $a=0$</u>, $a f_m(x)=0$ et $f'_m(x) = \sqrt{2}\,b$ auront le même ensemble de racines ssi $b=0$. Les points $\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$, seront dans S.

* <u>Si $a \neq 0$</u>, $f_m(x)$ et $f'_m(x)$ auront la même racine ssi le trinôme du 2e degré $f_m(x)$ admet une racine double, ie $\Delta = 2b^2 - 4ac = 0$.

Finalement : $S = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} / \ a=b=0 \text{ ou } \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 = 2ac \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} / \ b^2 = 2ac \right\}$

Si $m\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda b)^2 = 2(\lambda a)(\lambda c)$ donc $\lambda m \begin{pmatrix}\lambda a\\ \lambda b\\ \lambda c\end{pmatrix} \in S$.

<u>S est donc un cône de sommet O, d'équation $b^2 = 2ac$</u>.

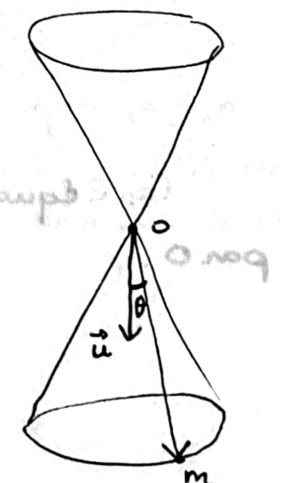
Calculons : $\vec{Om} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = a + c$

Soit $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire entre $\vec{Om}$ et $\vec{u}$:

$$\underbrace{\vec{Om} \cdot \vec{u}}_{a+c} = \underbrace{\|\vec{Om}\|}_{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \underbrace{\|\vec{u}\|}_{\sqrt{2}} \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{a+c}{\sqrt{2}\,.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

et comme $m\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in S$, $b^2 = 2ac$ et $\cos\theta = \dfrac{a+c}{\sqrt{2}\sqrt{(a+c)^2}} = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est indépendant du choix de m sur S.

<u>S sera donc le cône de sommet O, d'axe dirigé par $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$</u>



II.1.b

$a f_m(x)$ n'a pas de racine réelle ssi $a \neq 0$ et $\Delta = 2b^2 - 4ac < 0 \iff b^2 < 2ac$.

Le lieu des points m est l'intérieur* du cône S du II.1.a privé du sommet O

(*car le pt de l'axe de S : $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est dans l'ensemble)

II.1.c $f_m(x)$ a exactement 2 racines réelles distinctes ssi $a \neq 0$ et $\Delta > 0$, ie $b^2 > 2ac$. On obtient l'extérieur du cône S privé du plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

II.2.a

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ donné.

$$f_m(\lambda) = 0 \iff a\lambda^2 + \sqrt{2}\, b\lambda + c = 0$$

On obtient l'équation d'un plan P_λ passant par O. λ étant réel, on aura $\Delta = 2b^2 - 4ac \geqslant 0$ donc $b^2 \geqslant 2ac$ et P_λ sera extérieur au cône S.

P_λ ne contiendra, au plus, qu'une génératrice de S.

* Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donné.

$\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

$$f_m(\lambda) = 0 \iff a\lambda^2 + \sqrt{2}\, b\lambda + c = 0$$

$$a(\alpha + i\beta)^2 + \sqrt{2}\, b(\alpha + i\beta) + c = 0$$

$$\begin{cases} a(\alpha^2 - \beta^2) + \sqrt{2}\, b\alpha + c = 0 \\ 2a\alpha\beta + \sqrt{2}\, b\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha^2 - \beta^2)\, a + \sqrt{2}\alpha . b + c = 0 \\ \sqrt{2} . \alpha a + b = 0 \end{cases}$$

Ces 2 équations indépendantes définissent une droite D_λ passant par O.

II.2.b

1) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_m^{-1}(0)=\{\alpha\} \Leftrightarrow \begin{cases} f_m(\alpha)=0 \\ \text{et} \\ f_m \text{ possède une racine double} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in P_\alpha & (\text{II.2.a}) \\ \text{et} \\ m \in S & (\text{II.1.a}) \end{cases}$$

Ici P_α est tangent à S et m décrit une génératrice de S.

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ distincts.

$f_m(x) \in \mathbb{R}[x]$ donc α et β sont réels ou ~~imaginaires~~ complexes conjugués.

* Si α et β sont réels : $f_m^{-1}(0)=\{\alpha,\beta\} \Leftrightarrow f_m(\alpha)=f_m(\beta)=0 \Leftrightarrow m \in P_\alpha \cap P_\beta$

* Si $\beta=\bar{\alpha}$ et $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $f_m^{-1}(0)=\{\alpha,\beta\} \Leftrightarrow x \in D_\alpha \cap D_\beta = D_\alpha$

car $D_\alpha = D_\beta$ (voir les équations de D_α au II.2.a)

II.3

$S : b^2-2ac=0$

$P = S \cap \{a=1\} = \{m \,/\, b^2-2c=0 \text{ et } a=1\}$ est une parabole.

$$g : P \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$m\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix} \longmapsto \alpha \text{ racine de } f_m(x)=x^2+\sqrt{2}\,bx+c$$

avec $b^2-2c=0$ ie $\alpha = -\frac{\sqrt{2}\,b}{2} = -\frac{b}{\sqrt{2}}$

* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $g(m)=\alpha \Leftrightarrow \alpha = -\frac{b}{\sqrt{2}}$ avec $b^2-2c=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-\alpha\sqrt{2} \\ c=\frac{1}{2}b^2=\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow m\begin{pmatrix}1\\-\alpha\sqrt{2}\\\alpha^2\end{pmatrix}$$

g est <u>bijective</u> d'inverse $h(\alpha)=\begin{pmatrix}1\\-\alpha\sqrt{2}\\\alpha^2\end{pmatrix}$

* $m \doteq m_1 \circ m_2 = h(\alpha_1+\alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -(\alpha_1+\alpha_2)\sqrt{2} \\ (\alpha_1+\alpha_2)^2 \end{pmatrix}$

où $m_i = h(\alpha_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_i\sqrt{2} \\ \alpha_i^2 \end{pmatrix}$

Posons $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les droites m_1m_2 et sm sont parallèles car :

$$\overrightarrow{m_1m_2} \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha_1-\alpha_2)\sqrt{2} \\ \alpha_2^2-\alpha_1^2 \end{pmatrix} = (\alpha_2-\alpha_1) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \alpha_2+\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{sm} \begin{pmatrix} 0 \\ -(\alpha_1+\alpha_2)\sqrt{2} \\ (\alpha_1+\alpha_2)^2 \end{pmatrix} = (\alpha_2+\alpha_1) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \alpha_2+\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $m = m_1 \circ m_2$ est l'intersection de P et de la parallèle à m_1m_2 passant par le point $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de P.